Théorème de Brouwer dans le plan euclidien

Définitions : Soit Δ un triangle non plat de $\mathbb{R}^2$.

- Une triangulation de Δ est une subdivision de Δ en plus petits triangles telle que
  - chaque point de Δ appartient à un unique sous-triangle
  - un côté "intérieur" appartient à exactement 2 sous-triangles
- Un coloriage de Sperner d'une triangulation T est une application

$$f : \{\text{sommets des sous-triangles de T}\} \to \{A, B, C\}$$

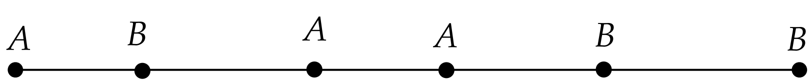
  où A, B et C peuvent se voir comme des couleurs formelles, telle que
  - Les trois sommets de Δ aient une image différente. Par abus de langage on parlera alors de ces 3 sommets en les appelant par leur image.
  - Si s appartient à l'arrête AB (resp. BC, resp. AC) alors $f(s) \in \{A, B\}$ (resp. $\{B, C\}$, resp. $\{A, C\}$).
- Si (T,f) est un coloriage de Sperner, un triangle complet est un triangle de T dont les 3 sommets ont une couleur différente.

Théorème : Soit $\mathbb{D}$ le disque unité de $\mathbb{R}^2$. Alors $\mathbb{D}$ admet la propriété du point fixe : si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est continue, elle admet un point fixe.

Lemme : Soit (T,f) un coloriage de Sperner. Alors il existe un triangle complet.

Preuve du lemme : La stratégie consiste à montrer que le nombre de triangle est impair (donc ≥ 1 car il ne peut pas être négatif).

Cas de la dimension 1 : Prenons le problème en dimension 1, c'est à dire un segment décomposée en sous-segments. On le colorie de sorte qu'une extrémité vaut A, l'autre B et les points intérieurs sont quelconques. Par exemple on peut avoir :



On note alors a le nombre de segment AA et c le nombre de segments AB. Comptons naïvement le nombre de sommets A, c'est à dire en regardant segment par segment. On a alors $2a + c$ sommets A (dans l'exemple ci-dessus il y a 2 segments AB et AA donc $a = 1$ et $c = 2$). Mais on a compté 2 fois chaque sommet A intérieur (les deux A intérieurs de l'exemple apparaissent dans 2 segments mais pas celui de l'extrémité). Donc en tout il y a 1 sommet A extérieur par hypothèse et un certain nombre n_a sommets A intérieurs. On a alors

$2a + c = 2n_a + 1$ d'où c est impaire donc on a bien ce que l'on veut.

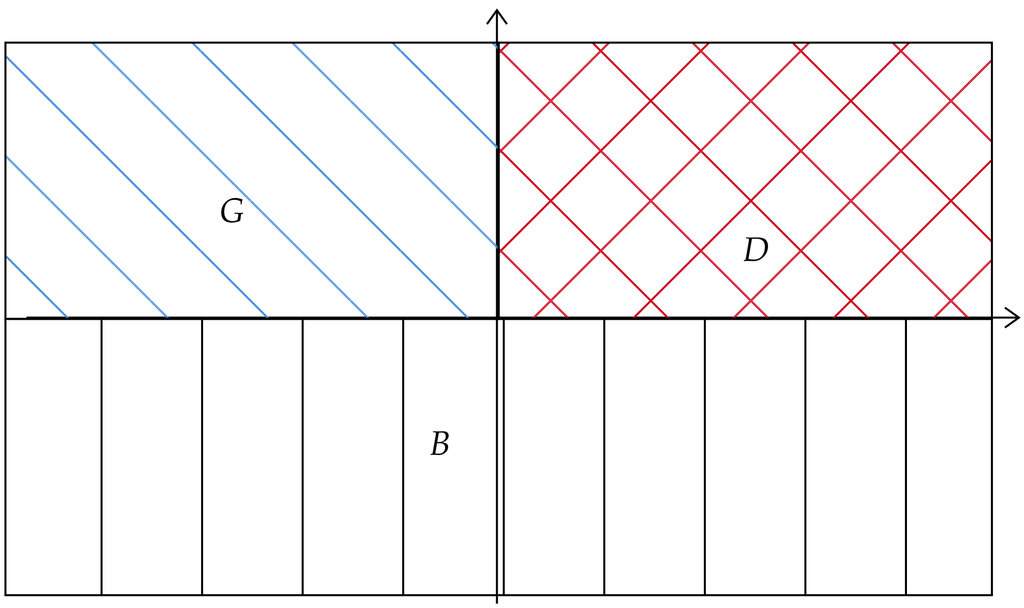
Retour à la dimension 2 : On note b de triangles complets et a le nombre de triangles de la forme ABA ou BAB i.e qui contiennent deux segments AB. De la même manière que précédemment on trouve naïvement $2a + b$ segments AB. Notons alors n le nombre réel de segments AB. On a alors

$$n = \partial n + \mathring{n}$$

où ∂n représente le nombre de segments intérieurs et $\mathring{n}$ représentent ceux intérieurs. On trouve alors la même équation qu'en dimension 1 à savoir $2a + b = \partial n + 2\mathring{n}$, donc b et ∂n ont la même parité. Comme ∂n est impair grâce au cas de la dimension 1, on a bien démontré le lemme. □

Preuve du théorème Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ continue. Il est clair que le disque est homéomorphe à un triangle plein quelconque (non pathologique, évidemment). Soit alors $\varphi : \mathbb{D} \to \Delta$ un homéomorphisme. Si $\tilde{f} := \varphi^{-1} f \varphi$ admet un point fixe x, f aussi car $f(\varphi(x)) = \varphi(x)$.

Pour la suite on découpe le plan euclidien de telle manière :



où $G = \{(x, y) : y > 0, x < 0\}$, $D = \{(x, y) : y > 0, x \geq 0\}$ et $B = \{(x, y) : y \leq 0\}$.

On se donne maintenant une suite de triangulation $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sorte que les taille des côtés des triangles converge uniformément vers 0 (on peut par exemple se donner les différentes étapes pour construire le triangle de Sierpienski). Soit $n \in N$. On définit un coloriage f_n sur T_n de la façon suivante :

Soit s un sommet de T_n. On pose alors

- $f(s) = G$ si $f(x) - x \in G$
- $f(s) = D$ si $f(x) - x \in D$
- $f(s) = B$ si $f(x) - x \in B$

On vient en fait d'assigner à chaque sommet la "direction" (modulo notre découpage de plan) du vecteur qui transporte x vers $f(x)$.

Le lemme nous donne alors une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} = [X_n Y_n Z_n]$ de triangles complets dans les triangulations T_n, de sorte que pour tout n on ait $f_n(X_n) = G$, $f_n(Y_n) = D$ et $f_n(Z_n) = B$.

Comme le triangle est compact on peut extraire une sous-suite convergente $(t_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $t = [X, Y, Z]$ (pour être rigoureux il faut faire une extraction diagonale en extractant d'abord sur X_n, puis Y_n et enfin Z_n). Comme la taille des côtés tend vers 0 on a nécessairement $X = Y = Z$. Notons x_0 ce point.

Mais par continuité de $f - \mathrm{Id}$ il vient que $(f - \mathrm{Id})(x_0) \in \overline{G}$, $(f - \mathrm{Id})(x_0) \in \overline{D}$ et $(f - \mathrm{Id})(x_0) \in \overline{B}$. Or il est clair que $\overline{G} \cap \overline{D} \cap \overline{B} = \{0\}$ donc $(f - \mathrm{Id})(x_0) = 0$ et donc x_0 est point fixe de f. $\square$